www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

ÉCOLE SUPÉRIEURE LIBRE DES SCIENCES COMMERCIALES APPLIQUÉES

CONCOURS D'ADMISSION
Voie Economique
Session de 1990

MATHEMATIQUES 1ère EPREUVE
Durée 4 H - Coefficient 4

EXERCICE I

On désigne par $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre 3 à éléments dans $\mathbb{R}$.

$\{e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$.
A tout élément u de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, on associe sa matrice M_u relativement à la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$.

On note J la matrice : $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

et pour tout élément A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose $A^* = J.{}^tA.J$
où ${}^tA$ est la matrice transposée de A ; c'est-à-dire la matrice carrée d'ordre 3 telle que, si A est la matrice d'éléments a_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant 3 \ ; \ 1 \leqslant j \leqslant 3)$, l'élément a'_{ij} de ${}^tA$ est a_{ji}.

1°) Soit A et B éléments de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$; calculer

$(A^*)^*$ et $(AB)^*$ en fonction de A, A^* et B^*.

2°) Soit Γ l'ensemble des matrices A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A^*A = I$ avec $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
et G l'ensemble des endomorphismes u de $\mathbb{R}^3$ tels que M_u appartient à Γ.

Montrer que si $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$; $u \in G$ et

$u(x) = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3$ alors on a :

$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$.

(Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $Y = M_u X$; on formera alors ${}^tY.J.Y$.).

3°) Pour tout réel α, on définit :

$\mathrm{ch}\alpha = (e^{\alpha} + e^{-\alpha})/2$ $\quad \mathrm{sh}\alpha = (e^{\alpha} - e^{-\alpha})/2$

On vérifiera que $\mathrm{ch}^2\alpha - \mathrm{sh}^2\alpha = 1$.

On admettra que si a et b sont des réels tels que $a^2 - b^2 = 1$, il existe un réel α tel que $a = \mathrm{ch}\alpha$ et $b = \mathrm{sh}\alpha$.

Soit G_1 le sous-ensemble des éléments u de G tels que $u(e_1) = e_1$ et tels que la composante de $u(e_3)$ sur e_3 soit positive.
Montrer que si u est élément de G_1 ; M_u est de l'une des formes suivantes :

(type 1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{ch}\alpha & \mathrm{sh}\alpha \\ 0 & \mathrm{sh}\alpha & \mathrm{ch}\alpha \end{pmatrix}$ ou (type 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{ch}\alpha & -\mathrm{sh}\alpha \\ 0 & \mathrm{sh}\alpha & \mathrm{ch}\alpha \end{pmatrix}$

où α est un nombre réel quelconque.

.../...

EXERCICE II

1°) Soit a un nombre réel strictement positif. On désigne par f_a la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $f_a(x) = x^a \ell nx$.
(ℓn désigne le logarithme népérien).

Montrer que la fonction f_a est prolongeable par continuité en $x = 0$ et en déduire l'existence et le calcul de l'intégrale $I_a = \int_0^1 x^a \ell nx \, dx$.

2°) a) Étudier les variations de la fonction définie par : $\varphi(x) = 2\ell nx + \frac{1}{x} - x$

b) En déduire que pour x vérifiant $0 < x < 1$; on a : $0 < \frac{x\ell nx}{x^2 - 1} < \frac{1}{2}$.

3°) Pour a un réel strictement positif, on définit la fonction g_a sur $\mathbb{R}^{+*} - \{1\}$ par : $g_a(x) = \frac{x^a \ell nx}{x^2 - 1}$.

Montrer que la fonction g_a est prolongeable par continuité en $x = 0$ et en $x = 1$.

4°) On pose, pour tout entier naturel n : $J_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1} \ell nx}{x^2 - 1} dx$.

a) Montrer que la fonction g_a est intégrable sur le segment $[0, 1]$.

b) Déduire de la question 1°) le calcul de $J_{n+1} - J_n$.

Montrer que la suite (J_n) est convergente.

5°) Déduire de la question 2°) b) une majoration de J_n et montrer que $\lim_{n \to +\infty} J_n = 0$.

6°) En calculant $\sum_{k=1}^{n} (J_k - J_{k-1})$, démontrer que $J_0 = \frac{1}{4} \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

Exercice III page suivante.

EXERCICE IV

Soient X et Y deux variables aléatoires réelles et soient y, a, b trois paramètres réels différents de 0 et 1 tels que la loi du couple (X, Y) soit donnée par le tableau suivant :

X \ Y	y	0	1
0	1/4	a	1/8
1	1/5	b	1/10

X prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$; Y dans $\{y, 0, 1\}$.

$a = p((X = 0) \cap (Y = 0))$; $b = p((X = 1) \cap (Y = 0))$.

1°) a) Déterminer a et b de manière que X et Y soient indépendantes.

b) Quelles seraient alors les lois conditionnelles de X pour les différentes valeurs de Y ?

2°) On suppose dans cette question que $a = 1/5$.
Déterminer la valeur de y telle que le coefficient de corrélation linéaire de X et Y soit nul.
Les variables X, Y sont-elles alors indépendantes ?

.../...

EXERCICE III

Un béton doit être dosé à 350 kg de ciment par m^3.
Un entrepreneur exécute des tests pour vérifier la bonne qualité du béton vendu.
Dans le modèle probabiliste retenu, on note :

A_1 est l'événement « le dosage est inférieur à 340 kg/m^3 ».
A_2 est l'événement « le dosage est compris entre 340 kg/m^3 et 350 kg/m^3 ».
A_3 est l'événement « le dosage est supérieur à 350 kg/m^3 ».
B_1 est l'événement « la centrale à béton essaie de fournir du béton dosé à 350 kg/m^3 exactement ».
B_2 est l'événement « la centrale à béton triche sur le dosage en ciment ».

On a relevé les valeurs des probabilités conditionnelles $P(A_i/B_j)$ avec $i \in \{1, 2, 3\}$ et $j \in \{1, 2\}$ dans le tableau suivant :

	A_1	A_2	A_3
B_1	0,3	0,2	0,5
B_2	0,5	0,2	0,3

1°) Avant la mise en place du test, on suppose a priori que $P(B_1) = P(B_2) = 1/2$.

Calculer $P(B_1/A_1)$ et $P(B_2/A_1)$: probabilités traduisant l'opinion a posteriori après avoir examiné des éprouvettes de béton dosées à moins de 340 kg/m^3.

2°) L'entrepreneur teste n éprouvettes de béton ; il détermine son opinion a posteriori sur la qualité du béton vendu en procédant ainsi :
Il considère le modèle où $P(B_1) = P_{1,0} = 1/2$ et $P(B_2) = P_{2,0} = 1/2$.

Puis, il procède au dosage d'une première éprouvette :

S'il constate que l'événement A_{i_1} ($i_1 = 1, 2, 3$) est réalisé, il remplace $P_{1,0} = P_{2,0} = 1/2$, respectivement par $P_{1,1} = P(B_1/A_{i_1})$ et par $P_{2,1} = P(B_2/A_{i_1})$.

Et ainsi successivement après chaque dosage, il remplace $P_{1,k-1}$ et $P_{2,k-1}$ respectivement par les probabilités conditionnelles $P_{1,k} = P(B_1/A_{i_k})$ et $P_{2,k} = P(B_2/A_{i_k})$ s'il constate que l'événement A_{i_k} ($i_k = 1, 2, 3$) est réalisé.

Lors de l'examen de la n-ième éprouvette de béton, le dernier couple $(P_{1,n}, P_{2,n})$ représente l'opinion de l'entrepreneur, a posteriori, sur la qualité du béton vendu.

Montrer que, si parmi les n éprouvettes, il y en a r réalisant A_1, s réalisant A_2 et t réalisant A_3, alors l'opinion a posteriori est telle que les $P_{i,n}$ ($i = 1, 2$) sont proportionnels aux :

$$P_{i,0} \cdot [P(A_1/B_i)]^r \cdot [P(A_2/B_i)]^s \cdot [P(A_3/B_i)]^t$$

pour ($i = 1, 2$).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail